Nous allons prouver un résultat plus général. Le lecteur qui ne souhaiterait qu'une solution pour le cas $n = 3$ pourra sans difficulté faire abstraction des lemmes et détailler l'algorithme (deux étapes).

Théorème :

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Si l'ensemble $A = \{1, 2, \ldots, [n.n!e] + 1\}$ est décomposé en n parties deux à deux disjointes quelconques, alors l'équation $x + y = z$ admet une solution en entiers deux à deux distincts et appartenant à une même partie.

Preuve : Soit $n \geqslant 2$ un entier.
On définit la suite (α_k) par $\alpha_k = k + n.(k-1)!\sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{i!}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n+1$, avec la convention $\sum_i^j = 0$ pour $i > j$.

En particulier, on a $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ pour tout k.

Lemme 1 :

On a $\alpha_{n+1} = [n.n!e] + 1$.

Preuve du lemme **1** *:* On a $\alpha_{n+1} = n + 1 + n.n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} = 1 + n.n! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$.

Or, $e = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}$, donc $\alpha_{n+1} = n.n!e + 1 - n.n!R_n$ où $R_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{i!}$.
Ainsi, $R_n > 0$ et :

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\Big) \\ &< \frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\Big) \\ &= \frac{1}{n.n!} \end{aligned}$$

Donc : $\alpha_{n+1} < n.n!e + 1 < \alpha_{n+1} + 1$. Et, puisque α_{n+1} est entier,on a bien $\alpha_{n+1} = [n.n!e] + 1$.

Lemme 2 :

Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\alpha_{k+1} = k(\alpha_k + n - k + 1) + 1$.

Preuve du lemme **2** *:* Soit $k \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{k+1} - 1}{k} &= 1 + n(k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} \\ &= 1 + n + n(k-1)! \sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{i!} \\ &= 1 + n + \alpha_k - k\text{, d'où la conclusion.} \end{aligned}$$

Revenons au théorème. On note que pour des entiers strictement positifs, si $x + y = z$ alors les seuls qui puissent être égaux sont x et y.

On se donne une décomposition arbitraire de $A = \{1, 2, \dots, \alpha_{k+1}\}$ en n parties deux à deux disjointes.

Pour $E \in A$ et $a \in A$, on note $\Delta_a = \{x - a \mid x \in E \text{ et } x > a\}$.

On considère alors l'algorithme suivant :

(1) Poser S = ensemble des parties formant la décomposition. Continuer.

(2) Choisir un des éléments de S qui contient le maximum d'éléments. L'appeler A_1. Poser $S = S - \{A_1\}$. Continuer.

(3) Poser $E_1 = A_1$, $a_1 = \min E_1$, $F_1 = \Delta_{a_1}(E_1) \setminus \{a_1\}$. Continuer

(4) Si $F_1 \cap A_1 \neq \phi$, s'arrêter. Sinon, poser $p = 1$ et continuer.

(5) Choisir un élément de S qui contient le maximum d'éléments de F_p. L'appeler A_{p+1}. Poser $S = S - \{A_{p+1}\}$. Continuer.

(6) Poser $E_{p+1} = A_{p+1} \cap F_p$, $a_{p+1} = \min E_{p+1}$,

$F_{p+1} = \Delta_{a_{p+1}}(E_{p+1}) - \Big\{ \sum_{i=0}^{j} a_{p+1-i} \mid j = 0, 1, \dots, p \Big\}$. Continuer

(7) Si $F_{p+1} \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{p} A_i \Big) \neq \phi$, s'arrêter. Sinon, continuer.

(8) Poser $p = p + 1$. Aller en (5).

Proposition 1 :

Pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$. Si E_p est construit par l'algorithme, alors :

a. E_p contient au moins $\alpha_{n-p+1} + p + 1$ éléments.

b. F_p est construit et il contient au moins α_{n-p+1} éléments.

Preuve de la proposition 1 *:* Par récurrence sur p.

• Si $p = 1$: D'après le principe des tiroirs, A_1 contient au moins $\frac{\alpha_{n+1}}{n} = \frac{1}{n} + n! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ éléments. Donc $E_1 = A_1$ contient au moins $1 + n! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \alpha_n + 2$ éléments (le nombre d'éléments est entier et $n! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ est entier ; la dernière égalité découle du lemme 2).

Notons que $\alpha_n + 2 \geqslant 2$ et qu'ainsi a_1 est bien défini. Et donc, F_1 est construit. Après différences (construction de $\Delta_{a_1}(E_1)$, ce qui fait diminuer le nombre d'éléments d'une unité) et élimination éventuelle de a_1, il reste donc au moins α_n éléments dans F_1. Ce qui prouve la proposition pour $p = 1$.

• Soit p fixé avec $1 \leqslant p \leqslant n$. Supposons que la proposition soit vraie pour ce p et que E_{p+1} soit construit par l'algorithme.

Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, F_p contient au moins α_{n-p+1} éléments, aucun n'étant dans $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ sinon l'algorithme se serait arrêté en (7) et E_{p+1} n'aurait pas été construit. D'après le principe des tiroirs, A_{p+1} contient donc au moins $\frac{\alpha_{n-p+1}}{n-p} = \alpha_{n-p} + p + 1 + \frac{1}{n-p}$ éléments de F_p (cf. lemme 2).

Comme précédemment, on en déduit que E_{p+1} contient alors au moins $\alpha_{n-p}+p+2$ éléments et donc que a_{p+1} est bien défini et F_{p+1} est construit. Après différences (-1) et éliminations éventuelles (pas plus de $p+1$), il reste au moins α_{n-p} éléments dans F_{p+1}.

Ce qui assure la conclusion au rang $p+1$ et achève la récurrence.

Remarque : Cela assure entre autre qu'il n'y aura pas de problème de définition dans (6).

Cas n°1 : Si l'algorithme s'arrête par (4).

Alors il existe $b \in F_1 \cap A_1$. Ainsi, $b = a_i - a_1$ pour un certain $a_i \in A_1$, et $b \neq a_1$ puisque $a_1 \notin F_1$. Par suite, $b + a_1 = a_i$ dans A_1, et la conclusion du théorème est assurée.

Cas n°2 : Si l'algorithme s'arrête en (7), pour $p < n$.

Notons qu'alors il ne s'est pas arrêté avant.

> **Proposition 2 :**
>
> Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, le nombre $X_k = a_p + a_{p-1} + \dots + a_k$ appartient à E_k.

Preuve de la proposition 2 : Par récurrence descendante.

• Pour $k = p$: on a directement $X_p = a_p \in E_p$ par construction.

• Soient $k \in \{2, \dots, p\}$ fixé. Supposons que $X_k \in E_k$. Alors, puisque $E_k \subset F_{k-1} \subset \Delta_{a_{k-1}}(E_{k-1})$, il existe $x \in E_{k-1}$ tel que $X_k = x - a_{k-1}$. Ainsi, $X_{k-1} = X_k + a_{k-1} = x$ est dans E_{k-1}. D'où la conclusion au rang $k-1$.

Puisque l'algorithme s'est arrêté en (7), c'est qu'il existe $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $F_p \cap A_k \neq \phi$. Soit alors $b = b_{i_1} - a_p \in F_p \cap A_k$, avec $b_{i_1} \in E_p$.

• Si $k = p$: Alors $b \in F_p$ et donc $b \neq a_p$. De plus, $b + a_p = b_{i_1}$ dans A_p et la conclusion du théorème est assurée.

• Si $k < p$: Alors $b_{i_1} \in E_p \subset F_{p-1}$, donc :

∘ $b_{i_1} = b_{i_2} - a_{p-1}$ pour un certain $b_{i_2} \in E_{p-1} \subset F_{p-2}$;

∘ $b_{i_2} = b_{i_3} - a_{p-2}$ pour un certain $b_{i_3} \in E_{p-2} \subset F_{p-3}$;

∘ etc.

∘ $b_{i_{p-k}} = b_{i_{p-k+1}} - a_k$ pour un certain $b_{i_{p-k+1}} \in E_k \subset A_k$.

En sommant, il vient $b = b_{i_{p-k+1}} - X_k$.

Or, d'après la proposition 2, on a $X_k \in E_k \subset A_k$. Donc, par construction, puisque $b \in F_p$, on a $b \neq X_k$.

Et $b + X_k = b_{i_{p-k+1}}$ dans A_k, ce qui assure la conclusion du théorème.

Cas n°3 : Si l'algorithme ne s'est pas arrêté et donne la valeur $p = n$ en (8).

Alors on construit A_n, E_n, F_n et d'après la proposition 1, on a $\mathrm{Card}(F_n) \geqslant \alpha_1 = 1$. Donc, $F_n \neq \phi$. D'où $F_n \cap A = F_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \neq \phi$. L'algorithme s'arrête donc par (7). Le raisonnement du cas n°2 s'adapte en tout point, et la conclusion du théorème est assurée.

Et la démonstration du théorème est achevée.

Remarques : Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $f(n)$ (resp. $g(n)$) le plus petit entier $k > 0$ tel que, si l'ensemble $A = \{1, 2, \dots, k\}$ est divisé en n parties deux à deux disjointes, alors l'équation $x + y = z$ (*) peut être résolue en entiers deux à deux distincts (resp. distincts ou non) dans une de ces parties.

Un célèbre théorème de Schur [1] affirme que $\frac{3^n+1}{2} < g(n) \leqslant [n!e]$. Abbott et Hanson [2] ont prouvé que $g(n) > c(89)^{n/4}$ pour une certaine constante $c > 0$ et Whithead [3] que $g(n) \leqslant \left[n!\left(e - \frac{1}{24}\right)\right]$.

Le résultat ci-dessus affirme donc que $f(n) \leqslant [n.n!e] + 1$. On sait [4] que $f(1) = 3$, $f(2) = 9$, $f(3) = 24$, $f(4) = 67$, $f(5) = 192$. Makowski [5] a prouvé que $f(n+1) \geqslant 2f(n) + \frac{1}{2}n(n+1) + 1$. Cela permet d'obtenir

$$f(n) \geqslant 2^{n+2} - \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 6) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

Notons enfin que Irving [6] a étudié le problème général où (*) est remplacée par $x_1 + x_2 + \ldots + x_r = z$ où $r \geqslant 2$ est fixé ! Il a prouvé que :

$$g_r(n) \leqslant \left[n!\,(r-1)^n\, e^{\frac{1}{r-1}}\right]$$
$$\text{et} \quad f_r(n) \leqslant \left[\frac{1}{2}\, n!\,(r-1)^n\,(rn+1)\, e^{\frac{1}{r-1}} + \frac{1}{r-1}\right].$$

Références :

[1] I. Schur, «Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m \bmod p$», *Jahresb. Deutsche Math. Verein*, 25 (1916), p. 114-117.

[2] H. L. Abbott, D. Hanson, «A problem of Schur and its generalizations», *Acta Arithmetica*, 20 (1972), p. 175-187.

[3] E. G. Whithead, «The Ramsey number $R(3, 3, 3, 3, 2)$», *Discrete Math.*, 4 (1973), p. 389-396.

[4] W. Sierpinski, *Elementary theory of numbers*, North-Holland, p. 439-443.

[5] A. Makowski, «On an arithmetic function» (en polonais), *Matematyka*, 10 (1959), p. 145-147.

[6] R. W. Irving, «An extension of Schur's theorem on sum-free partitions», *Acta Arithmetica*, (1973), p. 55-64.

[7] P. Bornsztein, «On an extension of a theorem of Schur», *Acta Arithmetica* (à paraître).