Conjecture des serpents

1 Définitions

On recouvre une grille carrée avec des *serpents* : un serpent est une ligne qui se déplace en passant d'une case à une de ses 4 voisines directes. De plus, le serpent ne peut passer deux fois sur la même case ; et enfin, le serpent doit respecter un sens de parcours : soit il s'agit d'un $\mathrm{S}^{\nwarrow}_{\searrow}$, se déplaçant du nord-ouest vers le sud-est, soit il s'agit d'un $\mathrm{S}_{\swarrow}^{\nearrow}$, se déplaçant du nord-est vers le sud-ouest.
Quelques cas particuliers :
– Un serpent horizontal $\mathrm{S}\leftrightarrow$ est à la fois un $\mathrm{S}^{\nwarrow}_{\searrow}$ et un $\mathrm{S}_{\swarrow}^{\nearrow}$.
– Un serpent vertical $\mathrm{S}\updownarrow$ est à la fois un $\mathrm{S}^{\nwarrow}_{\searrow}$ et un $\mathrm{S}_{\swarrow}^{\nearrow}$.
– Un serpent peut être restreint à une unique case, auquel cas on le note $\mathrm{S}\cdot$, et c'est à la fois un $\mathrm{S}\leftrightarrow$ et un $\mathrm{S}\updownarrow$.

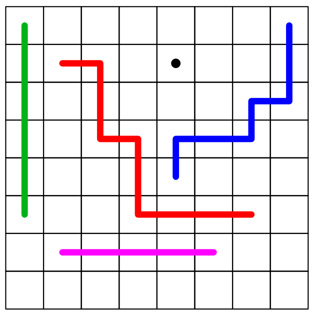

FIGURE 1 – Un $\mathrm{S}^{\nwarrow}_{\searrow}$ en rouge, un $\mathrm{S}_{\swarrow}^{\nearrow}$ en bleu, un $\mathrm{S}\leftrightarrow$ en mauve, un $\mathrm{S}\updownarrow$ en vert et un $\mathrm{S}\cdot$ en noir.

On parlera de *recouvrement* lorsque toute case d'un carrée est occupée par un unique serpent : les serpents ne peuvent donc se toucher.
On peut maintenant énoncer la *conjecture des serpents* :

Conjecture 1 *Tout recouvrement d'un carré de côté n contient au moins n serpents.*

Cette conjecture est difficile à prouver ; il est cependant trivial que n serpents suffisent à recouvrir le carré, il suffit par exemple de prendre n $\mathrm{S}\leftrightarrow$ de longueur n.

2 Un cas particulier simple

Il est possible de démontrer le résultat dans un cas plus simple, si l'on se restreint à un sens de parcours :

Proposition 1 *Il faut au moins n serpents $\mathrm{S}^{\nwarrow}_{\searrow}$ pour recouvrir un carré de taille $n \times n$.*

Ce résultat se démontre facilement en plaçant des nombres entiers sur le carré comme dans la figure 2. On observe alors qu'en se déplaçant le long d'un $\mathrm{S}^{\nwarrow}_{\searrow}$, le nombre entier augmente de 1 à chaque nouvelle case. Par conséquent, un $\mathrm{S}^{\nwarrow}_{\searrow}$ passe par au plus une case étiquetée 0. Le résultat se déduit alors du fait qu'il y a n cases étiquetées 0.

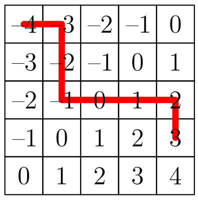

FIGURE 2 – Illustration de la démonstration.

3 Idée générale de la démonstration

Pour démontrer la conjecture 1, on procède par récurrence sur la taille n du carré : on suppose que pour tout carré de taille $n-1$, il faut disposer d'au moins $n-1$ serpents pour le recouvrir ; on prend alors un carré de taille n et on essaie de démontrer que n serpents sont nécessaires. Considérons donc un recouvrement d'un carré de taille n. S'il existe un serpent couvrant deux bords, comme sur la figure 3, comme le reste de la figure est un carré de taille $n-1$, en utilisant l'hypothèse de récurrence, il est immédiat que le recouvrement contient au moins n serpents.

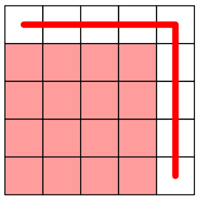

FIGURE 3 – Serpent couvrant deux bords.

Mais en général, il n'existe pas de tel serpent. L'idée est alors d'utiliser des *transformations*, qui vont modifier le recouvrement jusqu'à en faire apparaître un ; et pour que la preuve fonctionne, il est nécessaire que ces transformations *soit conservent soit diminuent* le nombre de serpents du recouvrement. Ainsi, si de telles transformations font apparaître un serpent couvrant deux bords, on en déduit que le recouvrement contient au moins n serpents, et la preuve est terminée.

4 Transformations des recouvrements

Nous décrivons dans cette section un certain nombre de transformations des recouvrements qui, rappelons-le, doivent conserver ou diminuer le nombre de serpents.

Transformation 1 *On peut prolonger un serpent si la case adjacente à son extrémité contient l'extrémité d'un autre serpent.*

Par exemple, pour un S$\nwarrow\!\searrow$, il faut que la case située au nord, ou celle à l'ouest, de l'extrémité nord-ouest du S$\nwarrow\!\searrow$ contienne l'extrémité d'un autre serpent, ou alors, que ce soit le cas de la case située au sud, ou de celle à l'est, de l'extrémité sud-est du S$\nwarrow\!\searrow$. L'autre serpent peut être réduit à un S$\cdot$ (ce qui diminuerait d'une unité le nombre de serpents du recouvrement).

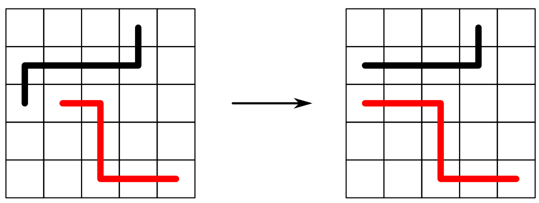

FIGURE 4 – Transformation 1.

Transformation 2 *On peut prolonger un serpent si la case adjacente à son extrémité contient un serpent de même direction.*

On coupe alors l'autre serpent avant de fusionner une de ses parties avec le serpent que l'on veut prolonger.

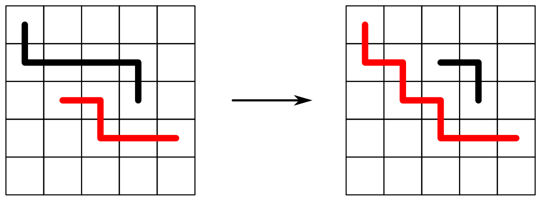

FIGURE 5 – Transformation 2.

Transformation 3 *Si un $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ touche le bord nord du carré, alors il est possible de le prolonger jusqu'au coin nord-ouest.*

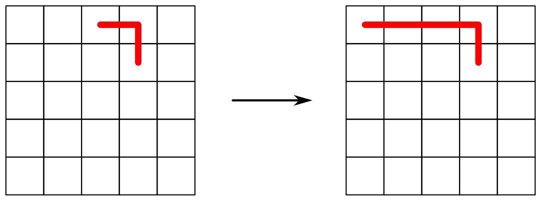

FIGURE 6 – Transformation 3.

En effet, quand le $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ progresse vers l'ouest, soit il rencontre un $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ et on utilise la transformation 2, soit il rencontre un $S_{\swarrow}^{\nearrow}$ et on utilise la transformation 1. Bien entendu, on peut énoncer cette transformation avec des $S_{\swarrow}^{\nearrow}$, ou avec d'autres bords.
Ce type de transformation est généralisable au cas où un autre serpent joue le rôle du bord du carré, ce qui fournit la transformation 4.

Transformation 4 *On peut prolonger un serpent situé* sous *un autre jusqu'à l'extrémité de l'autre serpent.*

L'énoncé n'est pas suffisamment explicite, mais la figure 7 illustre bien ce qui se passe.

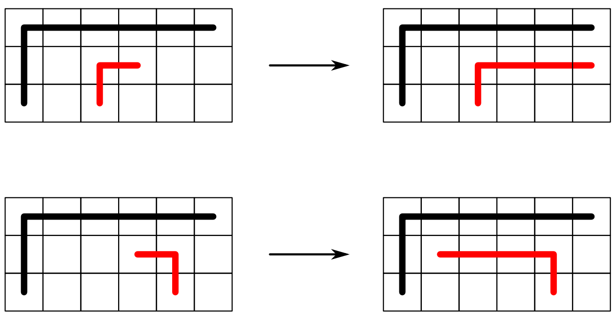

FIGURE 7 – Transformation 4.

Transformation 5 *Si un serpent est situé sour un autre de sens opposé, et si son virage est situé sous l'extrémité de l'autre, on peut intervertir leurs parties horizontales.*

Là encore, le recours à la figure 8 s'impose pour comprendre la transformation.

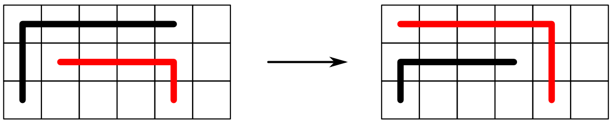

Figure 8 – Transformation 5.

Transformation 6 *Si un S↖↘ est situé juste à gauche d'un S↙↗, lequel commence verticalement, comme sur la figure 6, alors on peut les intervertir comme indiqué sur cette figure.*

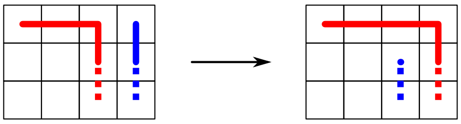

Figure 9 – Transformation 6.

La validité de cette transformation n'est pas immédiate ; on peut s'en convaincre en considérant deux cas. Ou bien, le S↙↗ oblique vers l'ouest à un endroit, comme dans la figure 10, et dans ce cas, le S↖↘ est bloqué par le S↙↗ et ne peut aller plus loin vers l'est. On le prolonge donc jusqu'à ce qu'il atteigne le S↙↗ (avec les transformations 1 et 2), puis on peut intervertir les serpents.

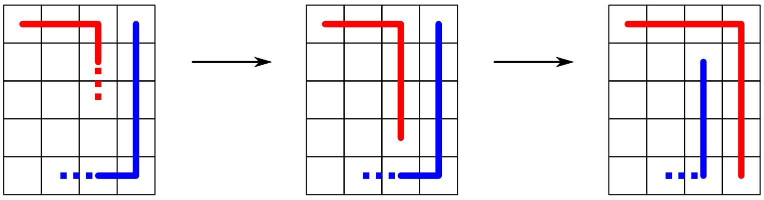

Figure 10 – Premier cas de la transformation 6.

Ou alors, le S↙↗ est restreint à un S↕, et un argument similaire permet de conclure.

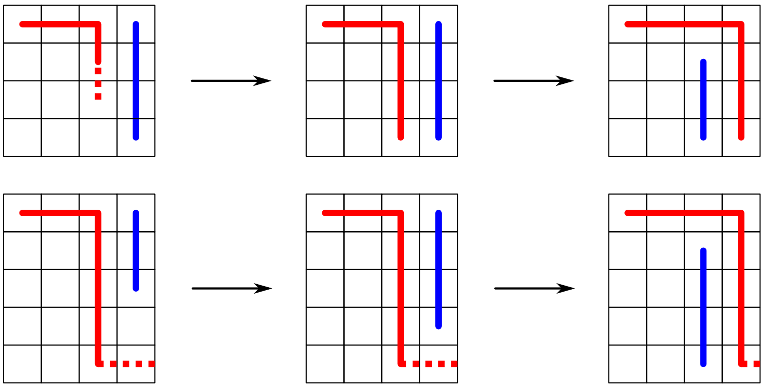

Figure 11 – Deuxième cas de la transformation 6.

5 Argument de la démonstration

Nous allons démontrer que quelque soit le recouvrement d'un carré de taille n, on peut appliquer un certain nombre de transformations jusqu'à ce qu'apparaisse un serpent restreint aux bords du carré (comme dans la figure 12). À l'aide de la transformation 3, on étend alors ce serpent jusqu'à ce qu'il recouvre entièrement deux bords du carré (ce qui est possible même si le serpent

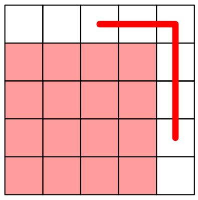

FIGURE 12 – Serpent restreint aux bords du carré.

était restreint à un unique bord, c'est-à-dire un $S\leftrightarrow$ ou un $S\updownarrow$), ce qui clôt la démonstration comme vu à la section 3.
Il nous reste donc à faire apparaître un serpent restreint aux bords du carré.

5.1 Bord nord du carré

Considérons d'abord le bord nord du carré. Si le coin nord-ouest contient un $S_{\swarrow}^{\nearrow}$, ou si le coin nord-est contient un $S^{\nwarrow}_{\searrow}$, alors il s'agit d'un serpent restreint aux bords du carré, et le problème est résolu. Sinon, le coin nord-ouest contient un $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ et le coin nord-est contient un $S_{\swarrow}^{\nearrow}$. Chaque case contenant soit un $S^{\nwarrow}_{\searrow}$, soit un $S_{\swarrow}^{\nearrow}$[1], il existe donc deux cases juxtaposées du bord nord telles que la case de gauche contient un $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ et celle de droite un $S_{\swarrow}^{\nearrow}$.
En utilisant la transformation 3 sur chacun de ces deux serpents, on les prolonge jusqu'aux coins du carré, et on se ramène donc au cas de la figure 13.

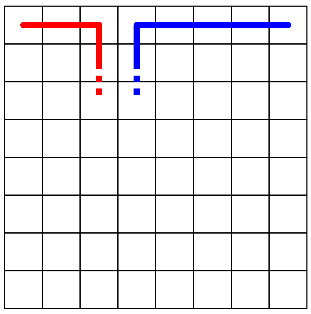

FIGURE 13 – Après la première étape.

5.2 Itération du procédé

On reproduit ensuite le même procédé sous le $S_{\swarrow}^{\nearrow}$ nouvellement créé, à l'aide cette fois de la transformation 4. On obtient alors généralement deux nouveaux serpents $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ et $S_{\swarrow}^{\nearrow}$; mais il est possible que seul un $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ soit créé, ou que seul un $S_{\swarrow}^{\nearrow}$ soit créé.
On recommence tant que cela est possible, toujours sous le $S_{\swarrow}^{\nearrow}$ nouvellement créé ; mais deux situations peuvent conduire à l'arrêt du procédé.

5.2.1 Premier cas d'arrêt

Le procédé s'arrête lorsqu'à une étape, seul un $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ est créé. On obtient alors un recouvrement du type de celui la figure 14 (en haut à gauche), et on peut construire un serpent restreint aux bords du carré en partant du dernier $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ créé. Pour cela, on utilise de multiples fois les transformations 2 et 5, suivant que le $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ que l'on étend est bloqué par un $S^{\nwarrow}_{\searrow}$ ou un $S_{\swarrow}^{\nearrow}$, comme illustré dans le reste de la figure 14.

1. Dans le cas d'un $S\updownarrow$, il suffit d'arbitrairement le considérer comme $S^{\nwarrow}_{\searrow}$. Dans le cas d'un $S\leftrightarrow$ou d'un $S\cdot$, ce serpent est restreint au bord nord du carré et le problème est résolu.

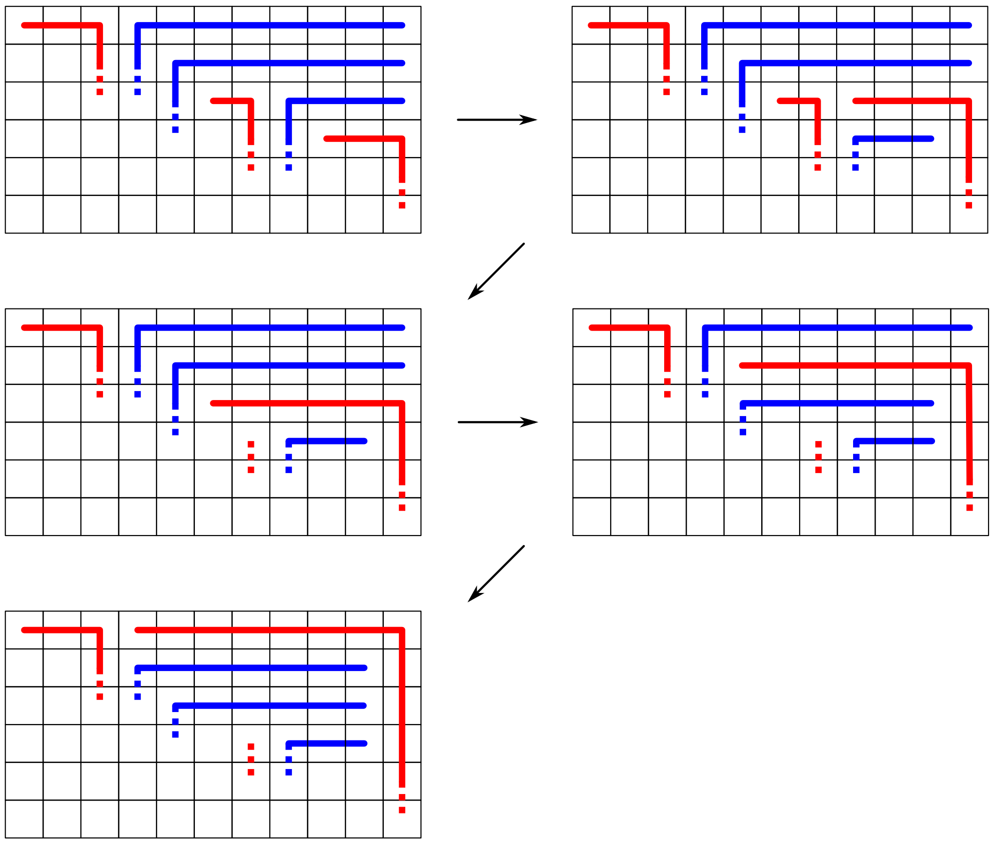

FIGURE 14 – Premier cas d'arrêt.

5.2.2 Deuxième cas d'arrêt

Le procédé s'arrête également dès lors que sous le dernier $S_{\swarrow\nearrow}$ créé, il n'y a pas la place de continuer, car ce $S_{\swarrow\nearrow}$ est collé au bord est.

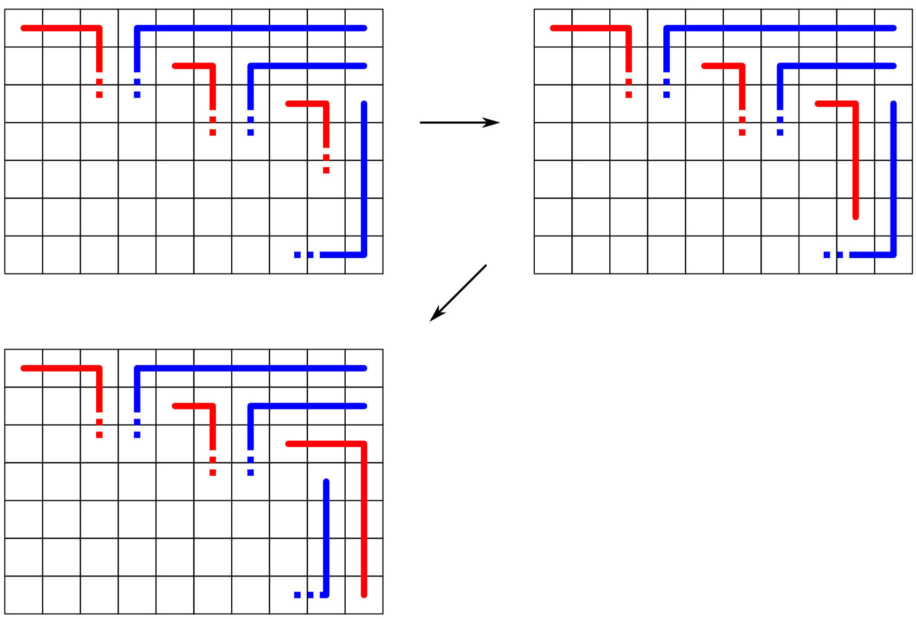

FIGURE 15 – Deuxième cas d'arrêt.

On commence alors par utiliser la transformation 6 pour amener le dernier $S_{\nwarrow\searrow}$ créé en contact avec le bord. Il ne reste plus qu'à faire comme dans le premier cas d'arrêt pour le transformer en un serpent restreint aux bords du carré.

Attention, le cas présenté dans la figure 15 est le cas idéal, lorsque le dernier $\mathrm{S}{\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow}$ créé est à côté d'un $\mathrm{S}{\nwarrow\!\!\!\!\!\!\searrow}$. En général, il est possible qu'il faille remonter plusieurs $\mathrm{S}{\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow}$ avant de retrouver le dernier $\mathrm{S}{\nwarrow\!\!\!\!\!\!\searrow}$ créé, comme dans la figure 16 où il y a trois $\mathrm{S}{\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow}$ terminaux. Dans ce cas, on commence par aligner verticalement ces $\mathrm{S}{\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow}$ terminaux, comme présenté à droite sur la figure, puis là encore, le dernier $\mathrm{S}{\nwarrow\!\!\!\!\!\!\searrow}$ créé va devenir restreint aux bords du carré, d'abord en utilisant autant de fois la transformation 6 qu'il y a de $\mathrm{S}{\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow}$ terminaux, ce qui permet d'amener ce $\mathrm{S}{\nwarrow\!\!\!\!\!\!\searrow}$ sur le bord est ; puis, on termine comme dans le premier cas d'arrêt.

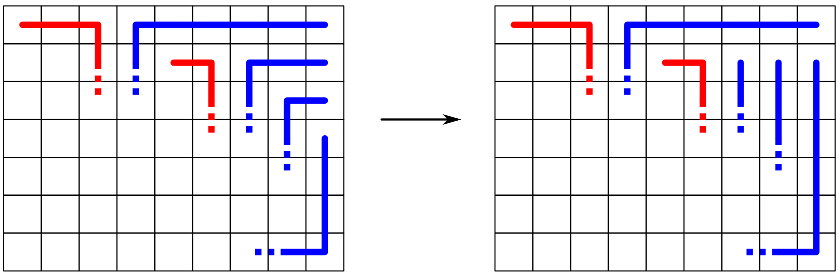

FIGURE 16 – Deuxième cas d'arrêt (fin plus compliquée).