

. Soient $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, on a :

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\text{perpendiculaire de B à AT}}{\text{perpendiculaire de C à AT}} = \frac{\text{aire (ABT)}}{\text{aire (ACT)}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BT \sin(180^\circ - \widehat{C})}{\frac{1}{2} AC \cdot CT \sin(180^\circ - \widehat{B})}$$

Ce quotient est égal à $\frac{c^2}{b^2}$ par la loi des sinus et le fait que $BT = CT$. Donc $BP = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}$

Traçons les perpendiculaires PM , QN de P , Q à AB . Alors

$$\cotan \widehat{ABQ} = \frac{BN}{QN} \quad QN = \frac{1}{2} PM = \frac{1}{2} BP \sin \widehat{B}$$

$$BN = \frac{BM + BA}{2} = \frac{c + BP \cos \widehat{B}}{2}$$

Donc $\cotan \widehat{ABQ} = \cotan \widehat{B} + \frac{c}{BP \sin \widehat{B}} = \cotan \widehat{B} + \frac{b^2 + c^2}{ac \sin \widehat{B}} = \frac{ac \cos \widehat{B} + b^2 + c^2}{ac \sin \widehat{B}} = \frac{a^2 + b^2 + 3c^2}{2ab \sin \widehat{C}}$ par la loi des sinus. De même (noter la symétrie en a et b), $\cotan \widehat{BAS}$ a la même valeur, donc : $\widehat{ABQ} = \widehat{BAS}$.

. En utilisant la loi des cosinus pour c^2 , on a :

$$\cotan \widehat{ABQ} = \frac{2(a^2 + b^2)}{ab \sin \widehat{C}} - 3 \cotan \widehat{C} \geq \frac{4}{\sin \widehat{C}} - 3 \cotan \widehat{C} = y, \text{ avec égalité si } a = b$$

(noter que $\sin \widehat{C} > 0$). On a $y = \frac{4 - 3 \cos \widehat{C}}{\sin \widehat{C}} > 0$ et $3 \cos \widehat{C} + y \sin \widehat{C} = 4$,

Donc $\frac{4}{\sqrt{y^2 + 9}} = \cos(\widehat{C} - \theta)$ où θ est l'angle aigu défini par $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{y^2 + 9}}$.

Donc $\sqrt{y^2 + 9} \geq 4$, $y \geq \sqrt{7}$. Ceci montre que $\cotan \widehat{ABQ} \geq \sqrt{7}$, donc $\widehat{ABQ} \leq \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right)$ avec égalité si $\widehat{C} = \theta = \cos^{-1} \left(\frac{3}{4} \right)$.

Conclusion : l'angle maximum est $\tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right)$, se produisant pour triangles isocèles avec $a = b$, $c^2 = 2a^2 (1 - \cos \widehat{C}) = \frac{a^2}{2}$, c'est-à-dire $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$.