Version 1 14 avril 2005

De la longueur des chaînes d'entiers inférieurs à 100

bob, muaddob et potabob

On définit sur l'ensemble des entiers naturels $\geqslant 1$ une relation symétrique non transitive, que l'on note $. - .$, par

$$n - n' \iff (n \mid n') \text{ ou } (n' \mid n).$$

On remarque que 1 est lié à tout entier naturel.

On appelle **chaîne d'entiers** de longueur k, une suite de k entiers $(n_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ vérifiant les conditions :

- pour tout indice $1 \leqslant i < k$, on a le lien $n_i - n_{i+1}$;
- pour toute paire d'indices distincts $1 \leqslant i < j \leqslant k$, on a $n_i \neq n_j$.

Soit $N \geqslant 1$ un entier naturel. On s'intéresse aux chaînes dont tous les entiers sont $\leqslant N$. On cherche à connaître la longueur maximale $L(N)$ de ces chaînes.

Remarque. La fonction L est croissante en N.

Toutes les chaînes $\mathcal{C}$ considérées à présent seront implicitement des chaînes d'entiers $\leqslant N$, où N est un entier fixé (à 100 !).

1. Composantes d'une chaîne d'entiers

Pour p un entier premier et $\mathcal{C} = (n_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ une chaîne d'entiers, on appelle **composante de facteur** p ou **p-composante** de $\mathcal{C}$, une sous-chaîne maximale de $\mathcal{C}$, composées uniquement de multiples de p ; c'est-à-dire la chaîne tronquée $(n_i)_{j\leqslant i\leqslant j'}$, avec $1 \leqslant j \leqslant j' \leqslant k$, vérifiant

- pour tout indice $j \leqslant i \leqslant j'$, on a $p \mid n_i$;
- si $j > 1$, l'entier premier p ne divise pas n_{j-1} ;
- si $j' < k$, l'entier premier p ne divise pas $n_{j'+1}$.

Remarque. Une p-composante d'une chaîne d'entiers $\leqslant N$ peut être vue comme une chaîne d'entiers $\leqslant N/p$, dont on a multiplié par p chacun des termes.

Fait 1. *Soit p un nombre premier, m et m' deux entiers tels qu'on ait le lien $mp - m'$. Si p ne divise pas m', alors m' divise m.*

En effet, si p ne divise pas m', mp ne divisera pas non plus m'. Or mp et m' sont tout de même liés par la relation $. - .$, c'est donc m' qui divise mp. On a ainsi $m' \mid mp$ et$p \nmid m'$; on conclut — en utilisant le théorème de Gauss — que m' divise m.

Fait 2. *Soit p un nombre premier et $\mathcal{C}_p$ une p-composante d'une chaîne $\mathcal{C}$ d'entiers $\leqslant N$. Un entier n voisin de $\mathcal{C}_p$ dans $\mathcal{C}$ vérifie $n \leqslant N/p$.*

En effet, cet entier n n'est pas divisible par p (n n'est pas une maille de la chaîne $\mathcal{C}_p$) et est lié à une extrémité de $\mathcal{C}_p$, que l'on peut noter mp. Par le fait 1, on sait que $n \mid m$. On a de plus $mp \leqslant N$ (mp est un élément de la chaîne $\mathcal{C}$), donc $n \leqslant m \leqslant N/p$.

Fait 3. *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux composantes distinctes d'une chaîne $\mathcal{C}$ d'entiers $\leqslant N$, de facteur respectif p_1 et p_2. On suppose que $p_1 p_2 > N$. Les composantes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont alors disjointes (elles n'ont pas d'entier en commun) et sont séparées dans $\mathcal{C}$ par une sous-chaîne non vide.*

Si $p_1 = p_2$, la maximalité des p-composantes obligent soit à avoir $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ (ce qui est exclu), soit à avoir les composantes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont disjointes et séparées par au moins un entier.
Si $p_1 \neq p_2$, un entier n commun à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_2$ doit vérifier les conditions $p_1 \mid n$, $p_2 \mid n$ et $1 \leqslant n \leqslant N$, ce qui est rendu impossible par la condition $p_1 p_2 > N$. Les composantes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont donc disjointes. Un entier n voisin de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{C}$ vérifie (*cf.* fait 2) $n \leqslant N/p_1$. On a donc $n < p_2$, un voisin de $\mathcal{C}_1$ ne peut donc pas être un élément de $\mathcal{C}_2$: les deux composantes sont séparées par au moins un entier.

On considère l'ensemble des composantes de $\mathcal{C}$ de facteurs $> \sqrt{N}$. Celles-ci vérifient deux à deux les conditions du fait 3 : elles sont disjointes et séparées par au moins un entier. On sait également (fait 2) que les voisins de ces composantes sont $< \sqrt{N}$. On ne peut donc pas avoir trop de telles composantes. On va préciser cette remarque pour $N = 100$.

2. Classes de composantes

On dit qu'une composante est de **classe** c si le nombre premier p associé vérifie $cp \leqslant N < (c+1)p$.

Fait 4. *Soit $\mathcal{C}_c$ une composante de $\mathcal{C}$ de classe c. Un entier n voisin de $\mathcal{C}_c$ dans $\mathcal{C}$ vérifie $n \leqslant c$.*

C'est une retraduction du fait 2.

Fait 5. *Soit $\mathcal{C}_c$ une composante de $\mathcal{C}$ de classe c. La longueur de $\mathcal{C}_c$ est $\leqslant L(c)$.*

En effet, la chaîne $\mathcal{C}_c$ est composée de multiples de p, tous $\leqslant cp$, où p est le facteur de la composante $\mathcal{C}_c$. En divisant chacun des entiers de la composante par p, on obtient une chaîne d'entiers tous $\leqslant c$, donc de longueur $\leqslant L(c)$.

Pour le cas $N = 100$, on a les entiers premiers suivants, triés par classe
Classe 1 : 97, 89, 83, 79, 73, 71, 67, 61, 59, 53
Classe 2 : 47, 43, 41, 37
Classe 3 : 31, 29
Classe 4 : 23
Classe 5 : 19, 17
Classe 6 : personne
Classe 7 : 13
Classe 8 : personne
Classe 9 : 11

Dans ce cas précis, il est plus efficace de considérer uniquement les composantes de classe $< D := 6$ que de considérer toutes les composantes de classe $< \sqrt{N}$ (*i.e.* de facteurs $> \sqrt{N}$).

En conséquence du fait 5, une composante de classe 1, 2, 3, 4 et 5 possède respectivement au plus 1, 2, 3, 4 et 4 éléments.

3. Nombre de composantes de petites classes

On note m le nombre de composantes de $\mathcal{C}$ de classe $< D$. On sait déjà que ces composantes sont deux à deux disjointes et séparées l'une de l'autre par des sous-chaînes composées d'au moins un entier. On peut donc écrire $\mathcal{C}$ sous la forme :

$$\mathcal{S}_0 - \mathcal{C}_1 - \mathcal{S}_1 - \mathcal{C}_2 - \mathcal{S}_2 - \ldots - \mathcal{S}_{m-1} - \mathcal{C}_m - \mathcal{S}_m, \qquad (\star)$$

où : – les sous-chaînes $\mathcal{S}_i$ sont toutes composées d'entiers $\leqslant N$ dont les facteurs premiers sont tous $\leqslant N/D$;

– pour tout indice $1 \leqslant i < m$, les sous-chaînes $\mathcal{S}_i$ sont composées d'au moins un entier ($\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_m$ peuvent être vides).

On note m^* le nombre de ces sous-chaînes $\mathcal{S}_i$ qui ne sont pas de longueur minimale (*i.e.* qui sont de longueur $\geqslant 2$ pour les sous-chaînes « intérieures », de longueur $\geqslant 1$ pour les deux des extrémités). Il est clair que $m^* \leqslant m + 1$.

Fait 6. *On a l'inégalité $m + m^* \leqslant D$.*

En effet, les nombres d'entiers de $\mathcal{C}$ qui sont directement voisins d'une composante $\mathcal{C}_i$ de classe $< D$, sont en nombre de $m + m^* - 1$ (un voisin obligatoire pour chaque $\mathcal{S}_i$ intérieure et un supplémentaire pour chaque $\mathcal{S}_i$ qui n'est pas de longueur minimale). Or ces voisins sont tous $< D$ (par le fait 2, le voisin d'une composante de classe c est $\leqslant c$, et toutes les composantes considérées sont de classes $< D$). Il ne peut donc y avoir plus de $D - 1$ de tels voisins.

4. Réduction du problème pour $N = 100$

Pour le cas $N = 100$ et $D = 6$, on considère les différentes possibilités.

a). Si la chaîne $\mathcal{C}$ comporte exactement 6 composantes de classe < 6, par le fait 6, les chaînes charnières $\mathcal{S}_i$ sont toutes de longueur minimale. La chaîne $\mathcal{C}$ peut s'écrire

$$\mathcal{C}_1 - s_1 - \mathcal{C}_2 - s_2 - \ldots - s_5 - \mathcal{C}_6,$$

où les s_i sont des entiers tels que $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Au mieux, cette chaîne est constituée de deux composantes maximales de classe 5, de celle de classe 4, des deux de classe 3, et de l'une des quatre de classe 2, ainsi que des 5 entiers connecteurs s_i. Cela fait un maximum de $2 * L(5) + L(4) + 2 * L(3) + L(2) + 5 = 25$ éléments.

b). Si la chaîne $\mathcal{C}$ comporte moins de 4 composantes de classe < 6, ces composantes ne peuvent apporter plus de $2 * L(5) + L(4) + L(3) = 15$ entiers à la chaîne $\mathcal{C}$. Le reste des entiers de $\mathcal{C}$ sont donc des entiers inférieurs à N dont les facteurs premiers sont inférieurs à N/D, qui sont $100 - 38 = 62$ au total. Dans le cas où $\mathcal{C}$ comporte au plus 4 composantes de classe < 6, la chaîne ne peut contenir plus de $62 + 15 = 77$ entiers.

c). Il reste uniquement à traiter le cas où la chaîne $\mathcal{C}$ comporte exactement 5 composantes de classe < 6. Le fait 6 nous indique qu'en représentant la chaîne $\mathcal{C}$ sous la forme $(\star)$, une seule des chaînes $\mathcal{S}_i$ n'est pas minimale. Dans un tel cas, les entiers de $\mathcal{C}$ qui sont sans facteur premier $> N/D$ et strictement supérieurs

à 5, sont consécutifs dans $\mathcal{C}$: ils forment donc une sous-chaîne de $\mathcal{C}$ que l'on notera $\mathcal{C}^*$. La chaîne $\mathcal{C}$ peut s'écrire

$$\mathcal{C}_1 - s_1 - \mathcal{C}_2 - s_2 - \ldots - s_5 - \mathcal{C}_6,$$

où les s_i sont des entiers tels que $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, où 5 des 6 chaînes $\mathcal{C}_i$ sont les composantes de classe < 6 et où la chaîne $\mathcal{C}_i$ restante est la sous-chaîne $\mathcal{C}^*$. Le meilleur choix des 5 composantes de classe < 6 semblent être de choisir les cinq plus longues possibles (c'est-à-dire celles correspondant aux nombres premiers 31, 29, 23, 19 et 17). Mais poser cette condition de maximalité des composantes n'est pas sans répercussions sur la position de entiers charnières s_i, et donc sur les voisins de la chaîne $\mathcal{C}^*$: ces conditions de voisinage ne peuvent-elles pas empêcher la chaîne $\mathcal{C}^*$ d'être maximale ? La question ne se pose pas car il existe une disposition des 18 éléments des composantes maximales et des 5 entiers charnières, qui ne crée aucune condition sur les extrémités de la chaîne $\mathcal{C}^*$:

$$\begin{aligned} 31 \cdot \big(3 - 1 - 2\big) - 2 - 29 \cdot \big(2 - 1 - 3\big) - 3 - 23 \cdot \big(3 - 1 - 2 - 4\big) - \ldots \\ \ldots - 4 - 19 \cdot \big(4 - 2 - 1 - 5\big) - 5 - 17 \cdot \big(5 - 1 - 2 - 4\big) - 1 - \mathcal{C}^*. \end{aligned}$$

La question devient alors : quelle est la longueur maximale possible pour cette chaîne $\mathcal{C}^*$? On se propose de montrer que cette longueur est inférieur à 54, et donc que la chaîne $\mathcal{C}$ comporte au plus $23 + 54 = 77$ éléments.

5. Résolution du problème modifié

On note $\mathcal{E}^*$ l'ensemble des entiers n tels que $6 \leqslant n \leqslant 100$ et dont les facteurs premiers sont $\leqslant 13$. On considère une chaîne $\mathcal{C}^*$ formée uniquement d'éléments de $\mathcal{E}^*$. En reliant les deux extrémités grâce à l'entier 1, on peut associer à la chaîne $\mathcal{C}^*$, un cycle $\mathcal{C}^\circ$ composé d'éléments de $\mathcal{E}^\circ := \mathcal{E}^* \cup \{1\}$.

On considère les trois sous ensembles de $\mathcal{E}^\circ$ suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{1, 7, 9, 11, 13\}, \\ \mathcal{U} &= \{13 \cdot 3, 13 \cdot 4, 7 \cdot 7, 7 \cdot 5, 9 \cdot 7, 9 \cdot 9, 9 \cdot 11\} \\ \text{et} \quad \mathcal{D} &= \{11 \cdot 5, 11 \cdot 7, 13 \cdot 7, 13 \cdot 5\}. \end{aligned}$$

En regardant les diviseurs et les multiples de chaque élément de $\mathcal{D} \cup \mathcal{U}$, on observe les faits suivants.

Fait 7. *Soit $d \in \mathcal{D}$ un élément du cycle $\mathcal{C}^\circ$. Les deux voisins de d dans $\mathcal{C}^\circ$ sont des éléments de $\mathcal{W}$.*

Fait 8. *Soit $u \in \mathcal{U}$ un élément du cycle $\mathcal{C}^\circ$. L'un au moins des deux voisins de u dans $\mathcal{C}^\circ$ est un élément de $\mathcal{W}$.*

On note $m_\mathcal{W}$, $m_\mathcal{U}$ et $m_\mathcal{D}$ le nombre d'éléments du cycle $\mathcal{C}^\circ$ qui appartiennent respectivement à $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{D}$.

Fait 9. *On a l'inégalité $2m_\mathcal{D} + m_\mathcal{U} \leqslant 2m_\mathcal{W}$.*

En effet, si $\mathcal{C}^\circ$ contient $m_\mathcal{D}$ éléments de $\mathcal{D}$ et $m_\mathcal{U}$ éléments de $\mathcal{U}$, d'après les faits 7 et 8, il y a $2m_\mathcal{D} + m_\mathcal{U}$ liens qui partent de ces éléments vers ses

$m_{\mathcal{W}}$ éléments de $\mathcal{W}$, qui ne peuvent recevoir que $2m_{\mathcal{W}}$ liens (2 pour chaque éléments).

En prenant en compte les majorations $m_{\mathcal{W}} \leqslant 5$, $m_{\mathcal{U}} \leqslant 7$ et $m_{\mathcal{D}} \leqslant 4$, on constate que l'on est dans au moins un de ces trois cas :

- $m_{\mathcal{D}} \leqslant 1$;
- $m_{\mathcal{D}} \leqslant 2$ et $m_{\mathcal{U}} \leqslant 6$;
- $m_{\mathcal{U}} \leqslant 4$.

Dans chacun de ces cas, le cycle $\mathcal{C}^\circ$ ne comporte pas au moins trois éléments de $\mathcal{E}^*$. Ainsi, sur les 57 éléments de $\mathcal{E}^*$, une chaîne $\mathcal{C}^*$ n'en reliera au maximum que 54. Voici un exemple de telle chaîne, fournie par Pierre J. :

$$13 \cdot \big(4 - 2 - 6 - 3 - 1 - 7\big) - \ldots$$
$$\ldots - 7 \cdot \big(1 - 7 - 14 - 2 - 8 - 4 - 12 - 6 - 3 - 9\big) - \ldots$$
$$\ldots - 3 \cdot \big(3 - 27 - 9 - 18 - 6 - 12 - 4 - 32 - 16 - 8 - 24 - 2\big) - \ldots$$
$$\ldots - 11 \cdot \big(6 - 3 - 9 - 1 - 2 - 4 - 8\big) - \ldots$$
$$\ldots - 2 \cdot \big(4 - 16 - 32 - 8\big) - \ldots$$
$$\ldots - 5 \cdot \big(16 - 8 - 4 - 12 - 6 - 18 - 9 - 3 - 15 - 5 - 10 - 20 - 2\big) - \ldots$$
$$\ldots - 7 \cdot \big(10 - 5\big).$$

On a ainsi démontré que $\boxed{L(100) = 77.}$

6. Quelques questions concernant la structure des solutions maximales

Toute chaîne maximale (à 77 entiers) possède-t-elle exactement 5 composantes de classes < 6 ?

Une chaîne maximale peut-elle comporter l'un des entiers $13 \cdot 5$, $11 \cdot 7$ ou $11 \cdot 5$?

Dans une chaîne $\mathcal{C}^*$ maximale (à 54 éléments), les entiers peuvent-ils être disposés de façon à ce que, pour chaque entier premier $p \leqslant 13$, les entiers de $\mathcal{C}^*$ ayant p comme plus grand facteur premier, forment une unique sous-chaîne de $\mathcal{C}^*$?

Quelles peuvent être les extrémités d'une chaîne maximale ?

Quels résultats obtient-on en appliquant la même méthode à $N = 200$?