Une caractérisation de la fonction sinus.

François Nicoleau

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
UMR CNRS-UN 6629
Département de Mathématiques
2, rue de la Houssinière BP 92208
F-44322 Nantes cedex 03
e-mail : nicoleau@math.univ-nantes.fr

Abstract

Dans cette courte note, nous donnons une caractérisation de la fonction sinus grâce un contrôle de ses dérivées. Mis à part l'utilisation du théorème de Paley-Wiener qui n'est pas au programme des CPGE et que l'on pourra admettre, il s'agit d'un exercice assez simple sur les fonctions de variable complexe.

Théorème 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞*. On suppose que* $f'(0) = 1$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\ f^{(n)}(x)\ | \leq\ 1.$$

Alors : $f(x) = \sin x$*.*

Preuve :

Etape 1 : une première estimation.

Par hypothèse, f s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$:

$$(1) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\ , \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ z^n\ ,$$

et on a :

$$(2) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\ ,\ |\ f(z)\ | \leq\ e^{\ |z|}.$$

Etape 2 : théorème de Paley-Wiener.

Supposons dans un premier temps que $f(0) = 0$ et posons $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$. Puisque $f(0) = 0$, g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et vérifie d'après (2) :

$$(3) \qquad \exists\, C > 0\ ,\ \forall z \in \mathbb{C}\ ,\ \mid g(z) \mid \leq\ C\ e^{\,|z|}.$$

De plus,

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mid g(x) \mid^2\ dx\ <\ +\infty.$$

On en déduit d'après le théorème de Paley-Wiener, (par exemple, W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, Théorème 19.3, p. 356), qu'il existe $F \in L^2(-1,1)$ telle que :

$$(5) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\ ,\ g(z)\ =\ \int_{-1}^{1} F(t)\ e^{-itz}\ dt.$$

On a donc en particulier :

$$(6) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\ ,\ \mid g(z) \mid \leq\ C\ e^{\,|Im\ z|}.$$

Etape 3 : principe du maximum.

Nous améliorons l'estimation (2). Nous avons en fait :

$$(7) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\ ,\ \mid f(z) \mid \leq\ e^{\,|Im\ z|}.$$

En effet, montrons (par exemple) que (7) est vérifiée pour $z \in \mathbb{C}^{++}$ où :

$$\mathbb{C}^{++} =\ \{\ z \in \mathbb{C},\ Re\ z \geq 0,\ Im\ z \geq 0\ \}.$$

Pour $\epsilon > 0$ et $z \in \mathbb{C}^{++}$, on définit :

$$(8) \qquad g_\epsilon(z) = \frac{f(z)\ e^{iz}}{1 + \epsilon z}.$$

La fonction g_ϵ est holomorphe sur un voisinage de $\mathbb{C}^{++}$ et elle est bornée d'après (6) car :

$$(9) \qquad g_\epsilon(z) = g(z)\ \frac{z}{1 + \epsilon z}\ e^{iz}.$$

De plus, sur le bord de $\mathbb{C}^{++}$, en utilisant l'hypothèse sur f et (2), $\mid g_\epsilon(z) \mid$ est bornée par 1. D'après le théorème du maximum,

$$(10) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^{++},\ \mid g_\epsilon(z) \mid \leq 1.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient (7).

Etape 4 : formule de Mittag-Leffler.

On définit la fonction h méromorphe sur $\mathbb{C}$ par :

$$h(z) = \frac{f(\pi z)}{\cos(\pi z)}. \tag{11}$$

Puisque pour $z = x + iy$, $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$, on a d'après (7),

$$\exists\, C > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \forall z \in C_N,\ |\, h(z)\,| \leq C, \tag{12}$$

où C_N est le carré de sommets $\pm N \pm iN$.
Les pôles (simples) de h sont les $z_k = k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, de résidus :

$$b_k \ = \ \frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\ f\left((k + \frac{1}{2})\pi\right). \tag{13}$$

D'après la formule de Mittag-Leffler, (on intègre la fonction $F(u) = \dfrac{h(u)}{u(u-z)}$ sur C_N pour z fixé non nul et différent des z_k, puis on fait tendre N vers $+\infty$ et on utilise (12)), on a :

$$\forall z \neq z_k,\ h(z) = h(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\ \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right), \tag{14}$$

i.e :

$$\frac{f(\pi z)}{\cos(\pi z)} \ = \ \frac{1}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k+1}\ f((k + \frac{1}{2})\pi)\ \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right). \tag{15}$$

Etape 5 : développement limité en 0.

Le développement limité en 0 de la formule (15) nous donne :

$$\pi\ f'(0) \ = \ \frac{1}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k\ \frac{f((k + \frac{1}{2})\pi)}{(k + \frac{1}{2})^2}\ , \tag{16}$$

i.e :

$$\frac{\pi^2}{4} \ = \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k\ \frac{f((k + \frac{1}{2})\pi)}{(2k+1)^2}\ . \tag{17}$$

Sachant que $|\ f((k + \frac{1}{2})\pi)\ | \leq 1$ et que :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} \ = \frac{\pi^2}{4}, \tag{18}$$

on en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ (-1)^k\ f((k + \frac{1}{2})\pi) \ = \ 1. \tag{19}$$

On a donc obtenu :

$$(20) \qquad \forall z \neq z_k, \ \frac{f(\pi z)}{\cos(\pi z)} \ = \ -\frac{1}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} \right) = \tan(\pi z),$$

la dernière égalité provenant de la formule de Mittag-Leffler. On a donc démontré le théorème dans le cas particulier où $f(0) = 0$.

Etape 7 : le cas général.
On décompose f en partie paire et impaire :

$$(21) \qquad f(x) = f_{impaire}(x) + f_{paire}(x) \ .$$

D'après l'étape 6, $f_{impaire}(x) = \sin x$. On en déduit que :

$$(22) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ , \ f^{(2k+1)}(x) \ = \ (-1)^k \ \cos x + f_{paire}^{(2k+1)}(x) \ .$$

En particulier,

$$(23) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ , \ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \ .$$

Par conséquent, la fonction $f^{(2k+1)}$ admet un extremun en 0, d' où :

$$(24) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ , \ f^{(2k+2)}(0) = 0 \ .$$

Puisque f_{paire} est également une fonction entière, on en déduit que :

$$(25) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ , \ f_{paire}(x) = f_{paire}(0).$$

En choisissant $x = \frac{\pi}{2}$, (resp. $x = -\frac{\pi}{2}$), dans l'égalité :

$$(26) \qquad f(x) = \sin x + f_{paire}(0) \ ,$$

on voit donc que $f_{paire}(0)$ est négatif, (resp. positif) car la fonction f est majorée par 1. Par conséquent, $f_{paire}(0) = 0$ et le théorème est démontré. $\square$