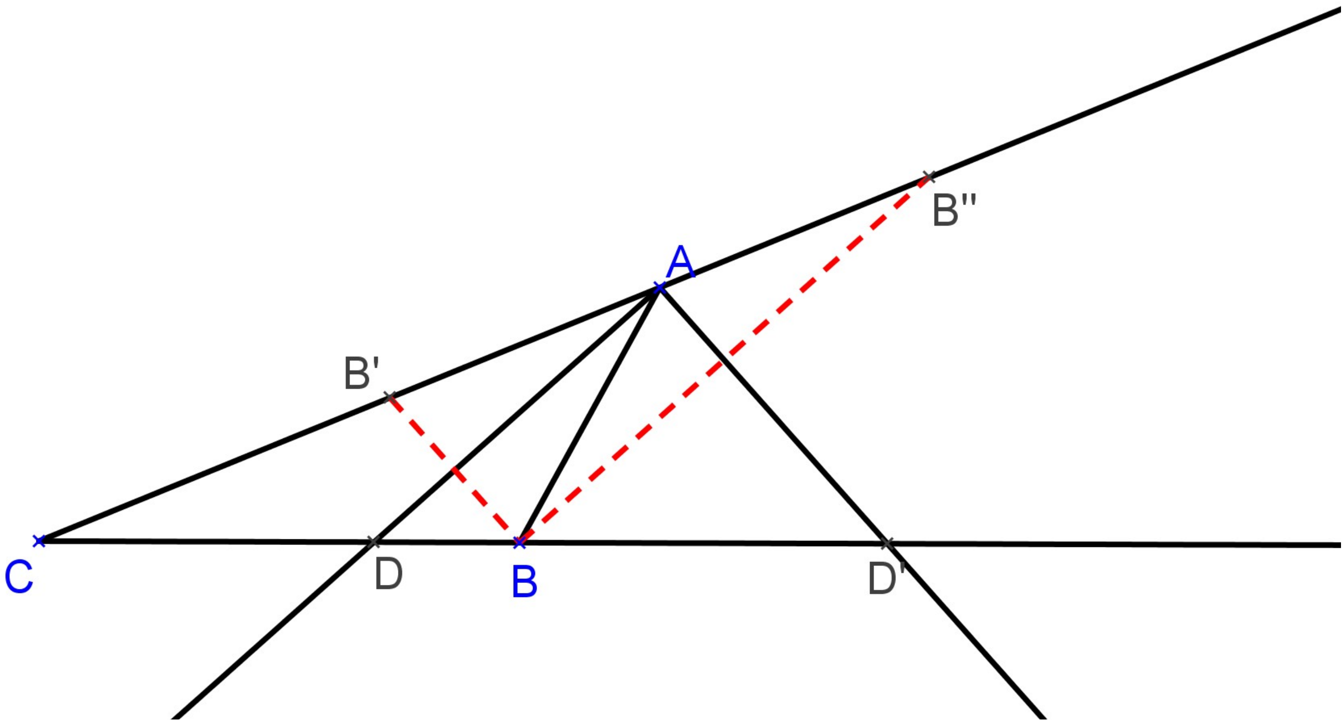
Soit ABC un triangle non isocèle tel que AB = c; AC = b et BC = a.
On note {D, D'} ; {E, E'} et {F, F'} les pieds sur le côté opposé des bissectrices intérieure et extérieure respectivement des angles $\widehat{BAC}$; $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$. On note Γ_1; Γ_2 et Γ_3 les cercles de diamètre respectif [DD']; [EE'] et [FF'].

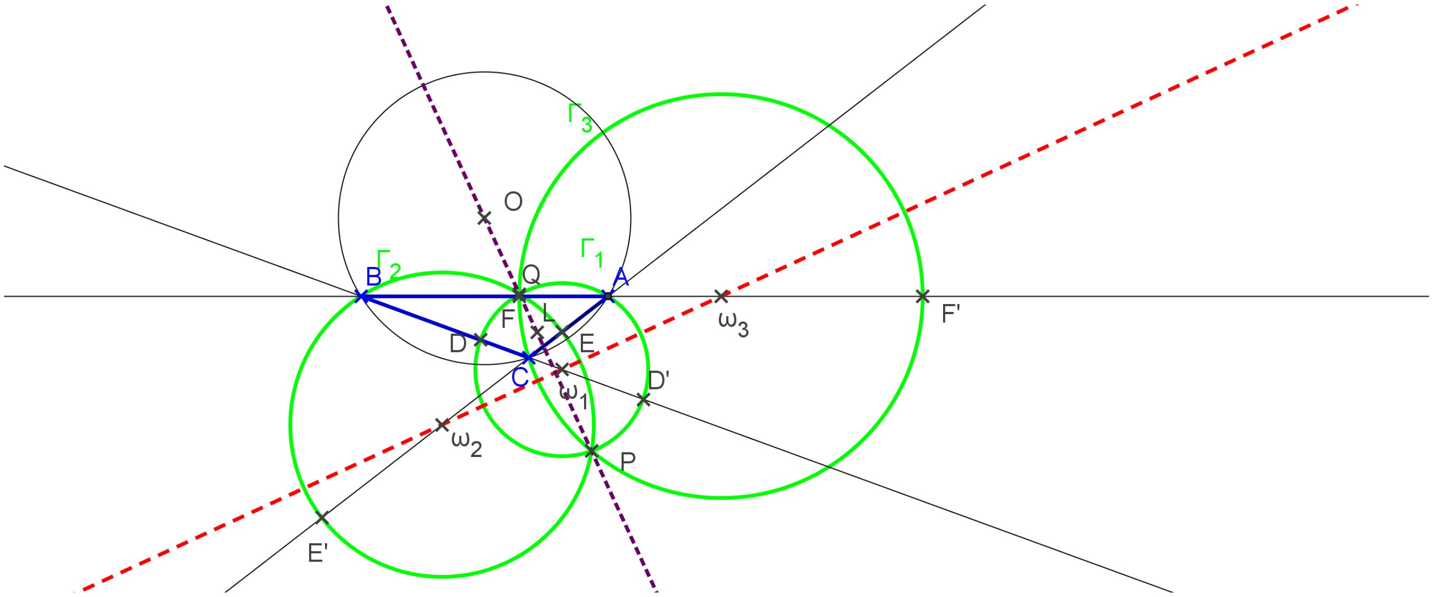
1) Considérons l'ensemble des points M du plan tel que $\frac{MB}{MC}=\frac{c}{b}$ alors M appartient au cercle de centre ω_1 barycentre (B ; 1) (C ; $-\frac{c^2}{b^2}$) donc ω_1 barycentre (B ; b^2) (C ; $-c^2$) donc $\overrightarrow{B\omega_1}=\frac{-c^2}{b^2-c^2}\overrightarrow{BC}$ or b > c alors $\omega_1\in(CB)/\omega_1\notin[CB]$

Montrons que le cercle précédent est le cercle de diamètre [DD']
Soient B' et B'' le symétrique du point B par rapport à la droite (AD) et (AD')



Puisque (AD) et (AD') sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{CAB}$ alors B' et B'' appartiennent à la droite (AC) et AB = AB' = AB'' = c. De plus le triangle BB'B'' est rectangle en B car A est le milieu de [B'B''] et que la médiane [AB] mesure la moitié du côté [B'B'']. Donc $(BB')\perp(BB'')$ *et on sait que* $(BB')\perp(AD)$ *et* $(BB'')\perp(AD')$ car ce sont les axes de symétrie alors les droites (BB') et (AD') sont parallèles et que les droites (AD) et (BB'') le sont aussi alors d'après le théorème de Thalès on a $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB''}}{\overline{AC}}=\frac{c}{b}$ *et* $\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}}=\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}=-\frac{\overline{AB''}}{\overline{AC}}=-\frac{c}{b}$ et donc D et D' appartiennent au cercle que l'on cherche. Puisque $\omega_1\in(BC)$ *et D et* $D'\in(BC)$ alors [DD'] est un diamètre du cercle Γ_1. De même si l'on cherche les points M tel que $\frac{MC}{MA}=\frac{a}{c}$ et

$\frac{MA}{MB}=\frac{b}{a}$ on trouve les cercles Γ_2 et Γ_3 avec ω_2 barycentre $(C\ ;\ c^2)\ (A\ ;\ -a^2)$ et ω_3 barycentre $(A\ ;\ a^2)\ (B\ ;\ -b^2)$ donc on aura $b^2\overrightarrow{\omega_1 B}-c^2\overrightarrow{\omega_1 C}=\vec{0}$ *et donc* $\frac{\overline{\omega_1 B}}{\overline{\omega_1 C}}=\frac{c^2}{b^2}$ car $\omega_1\notin[BC]$ de même on aura $\frac{\overline{\omega_2 C}}{\overline{\omega_2 A}}=\frac{a^2}{c^2}$ *et* $\frac{\overline{\omega_3 A}}{\overline{\omega_3 B}}=\frac{b^2}{a^2}$ d'où d'après le théorème de Ménélaüs on a $\frac{\overline{\omega_1 B}}{\overline{\omega_1 C}}\times\frac{\overline{\omega_2 C}}{\overline{\omega_2 A}}\times\frac{\overline{\omega_3 A}}{\overline{\omega_3 B}}=\frac{c^2}{b^2}\times\frac{a^2}{c^2}\times\frac{b^2}{a^2}=1$ donc les centres $\omega_1\,;\,\omega_2$ *et* ω_3 sont alignés.



2) Puisque (AD) et (AD') sont perpendiculaires alors $A\in\Gamma_1$ de même puisque $C\in[DD']$ car D et D' sont les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ pour les mêmes raison $C\in\Gamma_3$ alors les cercles Γ_1 *et* Γ_3 ont 2 points d'intersection

Soit P l'un des points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_3 alors $\frac{PB}{PC}=\frac{c}{b}$ *et* $\frac{PA}{PB}=\frac{b}{a}$.

Montrons que $P\in\Gamma_2$. On a $\frac{PC}{PA}=\frac{PC}{PB}\times\frac{PB}{PA}=\frac{b}{c}\times\frac{a}{b}=\frac{a}{c}$ donc $P\in\Gamma_2$

3) *On a* $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\div\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}}=-1$ alors la division [B ; D ; C ; D'] est harmonique or [DD'] est un diamètre de Γ_1 donc le cercle circoncrit Γ du triangle ABC est orthogonal au cercle Γ_1 . Puisque A appartient au deux cercles alors $(AO)\perp(\omega_1 A)$ donc d'après le théorème de Pythagore on a $\omega_1 O^2-\omega_1 A^2=OA^2=R^2$ où R est le rayon du cercle circonscrit. De même $\omega_2 O^2-\omega_2 B^2=R^2$ et $\omega_3 O^2-\omega_3 C^2=R^2$ Puisque O a la même puissance positve d'un point par rapport au cercles Γ_1; Γ_2 et Γ_3 donc O appatient à l'axe radical.

On a puisque ω_1 barycentre (B ; b²) (C ; -c²) alors

$$\overrightarrow{\omega_1 B}=\frac{-c^2}{b^2-c^2}\overrightarrow{CB} \text{ d'où } \omega_1 B^2=\frac{c^4a^2}{(b^2-c^2)^2}$$

$$\overrightarrow{\omega_1 C}=\frac{b^2}{b^2-c^2}\overrightarrow{CB} \text{ d'où } \omega_1 C^2=\frac{b^4a^2}{(b^2-c^2)^2}$$ mais aussi ω_1 barycentre (A ; 0) (B ; b²) (C ; -c²)

on a d'après la formule de Leibnitz application au point A

$$b^2AB^2-c^2AC^2=b^2\omega_1B^2-c^2\omega_1C^2+(b^2-c^2)\omega_1A^2$$ d'où

$$(b^2-c^2)\omega_1A^2=b^2c^2-c^2b^2+\frac{c^2b^4a^2}{(b^2-c^2)^2}-\frac{b^2c^4a^2}{(b^2-c^2)^2}=\frac{a^2b^2c^2(b^2-c^2)}{(b^2-c^2)^2}$$ d'où

$$\omega_1A^2=\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2}$$

On a L barycentre (A ; a²) (B ; b²) (C ; c²) donc d'après la formule de Leibnitz on a

$$a^2\omega_1A^2+b^2\omega_1B^2+c^2\omega_1C^2=a^2LA^2+b^2LB^2+c^2LC^2+(a^2+b^2+c^2)\omega_1L^2$$

or $a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$ donc en élevant au carré les 2 membres on aura

$$a^4LA^2+b^4LB^2+c^4LC^2+2a^2b^2\overrightarrow{LA}.\overrightarrow{LB}+2b^2c^2\overrightarrow{LB}.\overrightarrow{LC}+2a^2c^2\overrightarrow{LA}.\overrightarrow{LC}=0$$

or $2\overrightarrow{LA}.\overrightarrow{LB}=LA^2+LB^2-AB^2$ on aura en remplaçant

$$a^4LA^2+b^4LB^2+c^4LC^2+a^2b^2(LA^2+LB^2-AC^2)+b^2c^2(LB^2+LC^2-BC^2)+a^2c^2(LA^2+LC^2-AC^2)=0$$

d'où en simplifiant $(a^2+b^2+c^2)(a^2LA^2+b^2LB^2+c^2LC^2)=3a^2b^2c^2$

de plus $a^2\omega_1A^2+b^2\omega_1B^2+c^2\omega_1C^2=\dfrac{a^4b^2c^2+a^2b^4c^2+a^2b^2c^4}{(b^2-c^2)^2}=\dfrac{a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)}{(b^2-c^2)^2}$

donc en remplaçant et en divisant par (a² + b² + c²) les deux membres de l'égalité on a

$$\omega_1L^2=\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2}-3\frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2c^2)^2}$$ donc $$\omega_1L^2-\omega_1A^2=-3\frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

de même on aura $\omega_2L^2-\omega_2B^2=-3\dfrac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$ et $\omega_3L^2-\omega_3C^2=-3\dfrac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$

donc le point L a la même puissance négative par rapport aux cercles Γ_1; Γ_2 et Γ_3 donc L appatient à l'axe radical.