cos(a) = $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}$

on a $\cos(a)=\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}$ *d'où* $e^{ia}+e^{-ia}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}$

$$(e^{ia}+e^{-ia})^2=e^{2ia}+2+e^{-2ia}$$

$$Donc\ e^{2ia}+e^{-2ia}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}$$

$$e^{4ia}+e^{-4ia}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}$$

$$e^{8ia}+e^{-8ia}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$$

$$e^{16ia}+e^{-16ia}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

$$e^{32ia}+e^{-32ia}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$e^{64ia}+e^{-64ia}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$e^{128ia}+e^{-128ia}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$e^{256ia}+e^{-256ia}=\sqrt{2}$$

$$d'où \cos(256a)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$256a=\frac{\pi}{4}(mod\ 2\pi)\ ou\ -\frac{\pi}{4}(mod\ 2\pi)$$

$$a=\frac{\pi}{1024}\left(mod\ \frac{\pi}{124}\right)ou\ -\frac{\pi}{1024}\left(mod\ \frac{\pi}{124}\right)$$

<u>Pour la seconde partie</u>

<u>1ere méthode:</u>

$$Soit\ a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2}}}}_{n\ racines\ carrées}$$

$$Dans\ la\ partie\ précédente\ on\ vu\ que\ a_n=e^{\frac{2i\times\pi}{4\times2^n}}+e^{\frac{-2i\times\pi}{4\times2^n}}$$

$$donc\ \lim e^{\frac{2i\times\pi}{4\times2^n}}=\lim e^{\frac{-2i\times\pi}{4\times2^n}}=1\ donc\ \lim a_n=2$$

<u>2eme méthode</u>

soit la suite $u_0=\sqrt{2}\ et\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ avec un tableur on voitque la limite de cette suite est 2

Montrons tout d'abord que la suite est strictement croissante et majorée par 2

$$Croissance\ de\ u_n$$

$$Puisque\ une\ racine\ carrée\ est\ toujours\ positive\ alors\ on\ peut\ regarder\ la\ différence\ des\ carrés$$
$$pour\ montrer\ la\ croissance\ de\ la\ suite$$
$$on\ a\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}\ u_n<2\ car$$
$$u_0=\sqrt{2}<2\ et\ si\ u_n<2\ on\ a\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}<\sqrt{2+2}=2\ donc\ \textbf{la suite est majorée par 2}$$
$$u_{n+1}^2-u_n^2=2+u_n-u_n^2=2+(u_n(1-u_n))$$
$$Puisque\ 0<u_n<2\ alors -2<-u_n<0\ d'où -1<1-u_n<1\ et\ donc\ u_n(1-u_n)<2$$
$$u_{n+1}^2-u_n^2<0\ donc\ \boldsymbol{u_n}\ \textbf{est une suite strictement croissante}$$

Donc on viens de montrer que la suite est strictement croissante et majorée par 1 donc la limite de la suite u_n est 2

Donc $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+........}}}}}}}}}=2$