Enigme Prise2Tete, id=137774

Encore un peu plus compliqué, les dés, par scarta

Combien de fois en moyenne faut-il lancer un dé (à 6 faces) pour obtenir 3 chiffres distincts de même parité ? (En moyenne, donc le résultat n'est pas forcément entier)

Solution par masab

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance les dés n fois et l'on note $x_1, x_2, ..., x_n$ les chiffres obtenus. On commence par calculer la probabilité $Q(n)$ pour que ces n chiffres **ne contiennent pas** 3 chiffres distincts de même parité.

On note $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'application définie par $\varphi(i) = x_i$.

On note $A = \overset{-1}{\varphi}(\{1, 3, 5\})$, $B = \overset{-1}{\varphi}(\{2, 4, 6\})$.

On note $|A| = p$ (où $|A|$ désigne le nombre d'éléments de A) et $|B| = q = n - p$.

On note $|\varphi(A)| = r$, $|\varphi(B)| = s$, $(r + s \leq 6)$.

On va dénombrer l'ensemble des suites $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ne contenant pas 3 chiffres distincts de même parité ; pour cela on fait une partition de cet ensemble suivant les valeurs de (p, r, s). La suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ne contient pas 3 chiffres distincts de même parité ; cela se traduit par $r \leq 2$ et $s \leq 2$.

Pour $r = 2$, $s = 2$, $2 \leq p \leq n - 2$, on obtient $9\, \mathrm{C}_n^p\, (2^p - 2)(2^{n-p} - 2)$ suites.

Pour $r = 2$, $s = 1$, $2 \leq p \leq n - 1$, on obtient $9\, \mathrm{C}_n^p\, (2^p - 2)$ suites.

Pour $r = 1$, $s = 2$, $1 \leq p \leq n - 2$, on obtient $9\, \mathrm{C}_n^p\, (2^{n-p} - 2)$ suites.

Pour $r = 2$, $s = 0$, $p = n$, on obtient $3\,(2^n - 2)$ suites.

Pour $r = 0$, $s = 2$, $p = 0$, on obtient $3\,(2^n - 2)$ suites.

Pour $r = 1$, $s = 1$, $1 \leq p \leq n - 1$, on obtient $9\, \mathrm{C}_n^p$ suites.

Pour $r = 1$, $s = 0$, $p = n$, on obtient 3 suites.

Pour $r = 0$, $s = 1$, $p = 0$, on obtient 3 suites.

L'ensemble des suites $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ne contenant pas 3 chiffres distincts de même parité a donc pour cardinal

$$R(n) = 6 + 6\,(2^n - 2) + 9 \sum_{p=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^p + 18 \sum_{p=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^p\, (2^p - 2) + 9 \sum_{p=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^p\, (2^p - 2)(2^{n-p} - 2)$$

$$R(n) = 6 + 6\,(2^n - 2) + 9\,(2^n - 2) + 18\,(3^n - 3 \cdot 2^n + 3) + 9\,(4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4)$$

$$R(n) = 9 \cdot 4^n - 18 \cdot 3^n + 15 \cdot 2^n - 6$$

La probabilité $Q(n)$ pour que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ **ne contienne pas** 3 chiffres distincts de même parité est donc donnée pour $n \geq 1$ par

$$Q(n) = \frac{R(n)}{6^n} = 9\, \frac{2^n}{3^n} - \frac{18}{2^n} + \frac{15}{3^n} - \frac{1}{6^{n-1}}$$

La probabilité d'avoir 3 nombres de même parité exactement au n-ième coup est donc donnée par

$$P(n) = Q(n-1) - Q(n) \text{ pour } \; n \geq 2, \quad \text{et } P(1) = 0\,.$$

Par suite le nombre de fois en moyenne qu'il faut lancer un dé pour obtenir 3 chiffres distincts de même parité est donné par

$$M = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,P(n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(Q(n-1) - Q(n)) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,Q(n-1) - \sum_{n=2}^{+\infty} n\,Q(n)$$

$$M = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\,Q(n) - \sum_{n=2}^{+\infty} n\,Q(n) = Q(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} Q(n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Q(n)$$

$$M = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(9\,\frac{2^n}{3^n} - \frac{18}{2^n} + \frac{15}{3^n} - \frac{1}{6^{n-1}} \right)$$

$$M = 1 + \frac{6}{1-\frac{2}{3}} - \frac{9}{1-\frac{1}{2}} + \frac{5}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1}{6}}$$

$$M = 1 + 18 - 18 + \frac{15}{2} - \frac{6}{5}$$

$$M = \frac{73}{10} = 7.3$$

Finalement il faut lancer en moyenne un dé 7.3 fois pour obtenir 3 chiffres distincts de même parité.