Question

En moyenne, combien de fois faut-il lancer un dé pour obtenir 3 fois 6 d'affilée ?

Solution par masab.

On note $R(n)$ le cardinal de l'ensemble des suites $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne contenant pas de triple 6. On a

$$R(0) = 1 \ , \ \ R(1) = 6 \ , \ \ R(2) = 36 \ , \ \ R(3) = 215$$

$$R(n) = 5\,R(n-1) + 5\,R(n-2) + 5\,R(n-3) \quad \text{pour tout } n \geq 3$$

On note α, β, $\bar\beta$ les 3 zéros du polynôme $X^3 - 5\,X^2 - 5\,X - 5$. On a les relations

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \bar\beta = 5 \ , \quad \sigma_2 = \beta\,\bar\beta + \bar\beta\,\alpha + \alpha\,\beta = -5 \ , \quad \sigma_3 = \alpha\,\beta\,\bar\beta = 5 \qquad (1)$$

On pose

$$\lambda = \frac{(6-\beta)\,(6-\bar\beta)}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\bar\beta)} \ , \quad \mu = \frac{(6-\bar\beta)\,(6-\alpha)}{(\beta-\bar\beta)\,(\beta-\alpha)} \ , \quad \nu = \frac{(6-\alpha)\,(6-\beta)}{(\bar\beta-\alpha)\,(\bar\beta-\beta)} \qquad (2)$$

On a

$$R(n) = \lambda\,\alpha^n + \mu\,\beta^n + \nu\,\gamma^n \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

Cette formule permet de définir

$$R(-1) = 1/5 \ , \quad R(-2) = 0 \ , \quad R(-3) = 0$$

Soient des entiers naturels k, n tels que $1 \leq k \leq n$. On note $S(n,k)$ le cardinal de l'ensemble des suites $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telles que

$$(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) = (6, 6, 6)$$

et telles quil n'y ait pas de triple 6 avant l'indice k. On a

$$S(n,1) = 0 \ , \quad S(n,2) = 0 \ , \quad S(n,3) = 6^{n-3} \ , \quad S(n,4) = 5 \times 6^{n-4}$$

$$S(n,k) = 5\,R(k-4)\,6^{n-k} \quad \text{pour tout } k \geq 1$$

Le nombre de fois en moyenne qu'il faut lancer un dé pour obtenir un triple 6 est la limite M de la suite M_n

$$M_n = \frac{1}{6^n} \sum_{k=1}^{n} k\,S(n,k)$$

$$M_n = \frac{1}{6^n} \sum_{k=1}^{n} 5\,k\,R(k-4)\;6^{n-k}$$

d'où

$$M = \sum_{k=1}^{+\infty} 5\,k\,R(k-4)\;6^{-k}$$

$$M = \frac{5\,\lambda}{6\,\alpha^3} \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{\alpha}{6}\right)^{k-1} + \frac{5\,\mu}{6\,\beta^3} \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{\beta}{6}\right)^{k-1} + \frac{5\,\nu}{6\,\bar\beta^3} \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{\bar\beta}{6}\right)^{k-1}$$

$$M = \frac{5\,\lambda}{6\,\alpha^3}\left(1-\frac{\alpha}{6}\right)^{-2} + \frac{5\,\mu}{6\,\beta^3}\left(1-\frac{\beta}{6}\right)^{-2} + \frac{5\,\nu}{6\,\bar\beta^3}\left(1-\frac{\bar\beta}{6}\right)^{-2}$$

En utilisant (2) puis (1) il en résulte que l'on a $M = 258$.

Il faut lancer en moyenne un dé 258 fois pour avoir un triple 6.