Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose : $P(X) = X^n - 1$.

Alors $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X - a_k}$ où $a_1, a_2, ..., a_n$ sont les n racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes de l'unité.

D'où $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{P(X)}{X - a_k}$.

On a donc: Pour tout entier k compris entre 1 et n : $P'(a_s) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} (a_s - a_k)$.

On en déduit que : $\prod_{s=1}^{n} P'(a_s) = \prod_{k \neq s} (a_s - a_k)$

Or $P'(X) = nX^{n-1}$.

Donc $\prod_{s=1}^{n} P'(a_s) = \prod_{s=1}^{n} n a_s^{n-1} = n^n \left(\prod_{s=1}^{n} a_s \right)^{n-1}$.

Or les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les n nombres complexes $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$ où $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Donc $\prod_{s=1}^{n} a_s = \prod_{s=1}^{n-1} \alpha^s = \alpha^{1+...+(n-1)} = \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}$ soit $\prod_{s=1}^{n} a_s = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$.

On en déduit que $\prod_{k \neq s} (a_s - a_k) = n^n (-1)^{(n-1)^2}$.

Or $(-1)^{(n-1)^2} = (-1)^{(n-1)}$.

En conclusion : $\prod_{k \neq s} (a_s - a_k) = n^n (-1)^{(n-1)}$